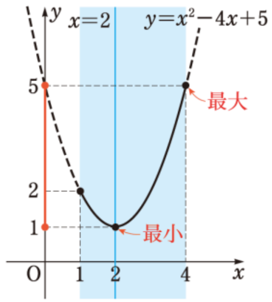
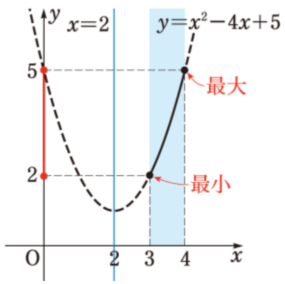
深進数学Ⅰ　探究5「定義域が変化するときの最大・最小」授業展開案

<table>
<tr><th>『深進数学』紙面</th><th>授業展開</th><th>教師の指導・支援</th></tr>
<tr>
<td>
p. 61，62

例6　2 次関数 $y=x^2-4x+5$（$1 \leqq x \leqq 4$）の最大・最小を考えてみよう。
$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$
であるから，そのグラフは，右の図の実線部分である。よって，この関数は，
$x=4$ のとき，最大値 5
$x=2$ のとき，最小値 1
をとる。


例7　2 次関数 $y=x^2-4x+5$（$3 \leqq x \leqq 4$）の最大・最小を考えてみよう。
グラフは，右の図の実線部分である。
よって，この関数は，
$x=4$ のとき，最大値 5
$x=3$ のとき，最小値 2
をとる。


</td>
<td>
（ここまでの授業で，p. 63 問 17 までを扱ったものとする）

1．　p.61例６，p.62例７から，
2次関数　$y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$について，
定義域が（$1 \leqq x \leqq 4$）の場合と定義域が（$3 \leqq x \leqq 4$）の場合で，最大値と最小値を求める方法を振り返る。

(1)　　最小値について
①　定義域が（$1 \leqq x \leqq 4$）の場合，1（$x=2$）
②　定義域が（$3 \leqq x \leqq 4$）の場合，2（$x=3$）

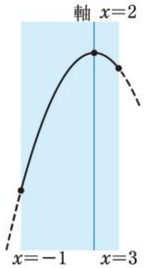
(2)　　最大値について
①　定義域が（$1 \leqq x \leqq 4$）の場合，5（$x=4$）
②　定義域が（$3 \leqq x \leqq 4$）の場合，5（$x=4$）
</td>
<td>
○具体的な値を与えて最大値と最小値を求めさせ，「定義域と軸の位置関係」に着目させる。
</td>
</tr>
</table>

p. 63

例題 4 2 次関数 $y=-x^2+2ax+b$ $(-1\leqq x\leqq 3)$ は，最小値 -4 をとり，また，$x=2$ のとき最大となる。このとき，定数 a，b の値を求めよ。

方針 放物線 $y=-x^2+2ax+b$ は，上に凸である。
一般に，上に凸の放物線では，軸から遠いほど，その放物線を表す関数の値は小さくなる。

解 $y=-x^2+2ax+b$
$=-(x-a)^2+a^2+b$
この関数のグラフは，上に凸の放物線であり，定義域 $-1\leqq x\leqq 3$ の両端以外の点 $x=2$ で最大となることから，この放物線の軸は $x=2$ であることがわかる。したがって，　$a=2$
また，右の図より最小値 -4 をとるのは，$x=-1$ のときである。このことから，
$-(-1)^2+2\cdot 2\cdot(-1)+b=-4$ すなわち，$b=1$
よって，　$a=2$，$b=1$



問 16 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ は，最大値 4 をとり，また，$x=1$ のとき最小となる。このとき，定数 a，b の値を求めよ。 ▶p.65 2 3 5

問 17 a を正の定数とするとき，2 次関数 $y=(x-2)^2+5$ $(0\leqq x\leqq a)$ が $x=a$ で最小値をとるような定数 a の値の範囲を求めよ。 ▶p.65 4

探究 5 a を正の定数とするとき，2 次関数 $y=x^2-4x+7$ $(0\leqq x\leqq a)$ の最大値と最小値を求めよ。

探究編▶p.178

2．　2次関数の最大値と最小値を求めるには，「定義域と軸の位置関係」に着目すればよいことを確認する。

○例題４に必要な見方・考え方は定義域と軸の位置関係であったことを確認させる。

3．　2次関数　$y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$ について，定義域が（$0\leqq x\leqq a$）の場合で，最大値と最小値を求める方法を考える。(探究5)

○問 17 を，探究 5 を扱う直前に扱ってもよい。

(1)　まずはaに具体的な値$a=1$，2，3，4，5を代入し，そのときの最大値と最小値を調べる。

(2)　aの値によって最大値と最小値が変化することを確認し，aをどのように場合分けすればよいかを考える。

○(1) は個人ワークとして取り組ませる。(2) についてはまずは１人で考えさせ，その後グループで話し合わせる。

p. 178〜179

k を -2 より大きい定数とするとき，2 次関数 $y=x^2$ $(-2\leqq x\leqq k)$ の最大値と最小値を考えよう。

まずは，k に具体的な値を代入して，最大値・最小値の変化を確かめる。

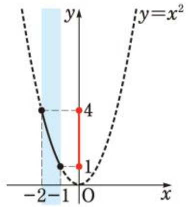
(1) $k=-1$ のとき

つまり，定義域が $-2\leqq x\leqq -1$ のとき，

右の図より，

$x=-2$ のとき，最大値 4

$x=-1$ のとき，最小値 1



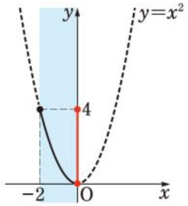
(2) $k=0$ のとき

つまり，定義域が $-2\leqq x\leqq 0$ のとき，

右の図より，

$x=-2$ のとき，最大値 4

$x=0$ のとき，最小値 0



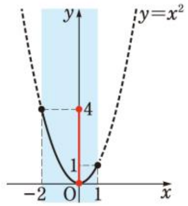
(3) $k=1$ のとき

つまり，定義域が $-2\leqq x\leqq 1$ のとき，

右の図より，

$x=-2$ のとき，最大値 4

$x=0$ のとき，最小値 0



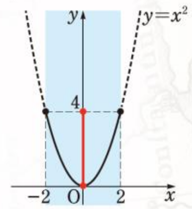
(4) $k=2$ のとき

つまり，定義域が $-2\leqq x\leqq 2$ のとき，

右の図より，

$x=-2$，2 のとき，最大値 4

$x=0$ のとき，最小値 0



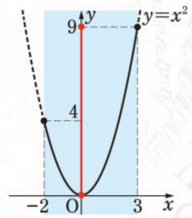
(5) $k=3$ のとき

つまり，定義域が $-2\leqq x\leqq 3$ のとき，

右の図より，

$x=3$ のとき，最大値 9

$x=0$ のとき，最小値 0



以上のことを踏まえて，2 次関数 $y=x^2$ $(-2\leqq x\leqq k)$ の最大値・最小値を考えてみよう。

まず，最大値については，$k=2$ の前後で最大値をとる値が変化し，次のようになる。

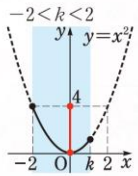
(i) $-2<k<2$ のとき，

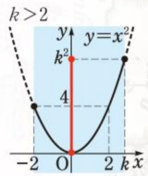
最大値 4 ($x=-2$ のとき)

(ii) $k=2$ のとき，

最大値 4 ($x=-2$，2 のとき)

(iii) $k>2$ のとき，最大値 k^2 ($x=k$ のとき)



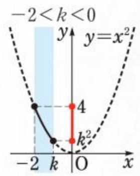


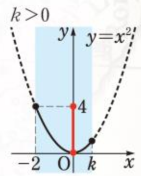
次に，最小値については，$k=0$ の前後で最小値をとる x の値が変化し，次のようになる。

(i) $-2<k<0$ のとき，

最小値 k^2 ($x=k$ のとき)

(ii) $k\geqq 0$ のとき，最小値 0 ($x=0$ のとき)





○生徒の手が止まっている場合は，p. 178〜179 を確認させることで，どのような観点で場合分けしているのかを気づかせるとよい。

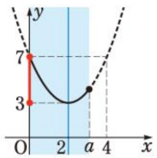
また，p, 178〜179 の関数 $y=x^2$ $(-2\leqq x\leqq k)$ を，探究 5 を扱う前に考えさせてもよい。

p. 180〜181

解 $y=x^2-4x+7=(x-2)^2+3$ より，
この関数のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$ である。
最大値については，右の図(i)〜(iii)に示した3通りに場合分けできる。

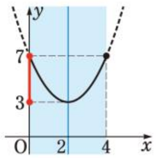
(i) $0<a<4$ のとき，右の図より，
$x=0$ で最大値7をとる。

(i)



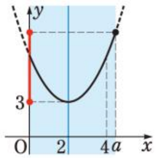
(ii) $a=4$ のとき，右の図より，
$x=0$，4 で最大値7をとる。

(ii)



(iii) $4<a$ のとき，右の図より，
$x=a$ で最大値 a^2-4a+7 をとる。

(iii)



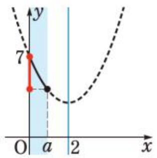
以上より，求める最大値は，
$0<a<4$ のとき，最大値7（$x=0$ のとき）
$a=4$ のとき，最大値7（$x=0$，4 のとき）
$4<a$ のとき，最大値 a^2-4a+7（$x=a$ のとき）

一方，最小値については，下の図(i)〜(ii)に示した2通りに場合分けできる。

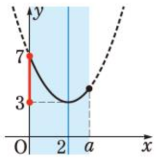
(i) $0<a<2$ のとき，右の図より，
$x=a$ で最小値 a^2-4a+7 をとる。

(ii) $2\leqq a$ のとき，右の図より，
$x=2$ で最小値3をとる。

(i)



(ii)



以上より，求める最小値は，
$0<a<2$ のとき，最小値 a^2-4a+7（$x=a$ のとき）
$2\leqq a$ のとき，最小値3（$x=2$ のとき）
■

(3) (2)で考えた考え方をまとめ，それをもとに探究5の解答を作成する。まとめた考え方と解答を発表する。

① 最大値と最小値を別々に考えた場合

最大値について

(ⅰ)定義域の左端x=0で最大となる場合
→「軸が定義域の中央より右側」
すなわち，0<a<4

(ⅱ)定義域の両端x=0，aで最大となる場合
→「軸が定義域の中央」
すなわち，a=4

(ⅲ)定義域の右端x=aがで最大となる場合
→「軸が定義域の中央より左側」
すなわち，4< a

最小値について

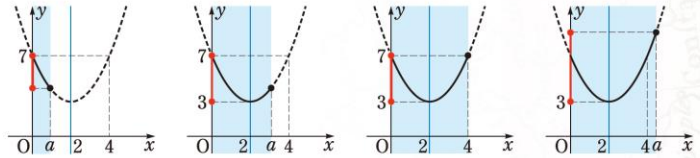
(ⅰ)定義域の右端x=aで最小となる場合
→「軸が定義域に含まれない」
すなわち，0< a <2

(ⅱ)軸x=0で最小となる場合
→「軸が定義域に含まれる」
すなわち，2< a

○解答発表の際には，p. 180 の「最大値・最小値を別々に考えた場合」と，p. 181 の「最大値・最小値をまとめて考えた場合」のどちらでもよいということに触れてもよい。

○それぞれの場合についてグラフで表現させる。そして「定義域と軸の位置関係」が場合分けに重要な観点であることを確認させる。

前ページの例題は，最大値と最小値をまとめて次のように解答してもよい。



(I) $0<a<2$ のとき
最大値 7
($x=0$ のとき)
最小値 a^2-4a+7
($x=a$ のとき)

(II) $2 \leqq a<4$ のとき
最大値 7
($x=0$ のとき)
最小値 3
($x=2$ のとき)

(III) $a=4$ のとき
最大値 7
($x=0$，4 のとき)
最小値 3
($x=2$ のとき)

(IV) $4<a$ のとき
最大値 a^2-4a+7
($x=a$ のとき)
最小値 3
($x=2$ のとき)

問 a を正の定数とするとき，2 次関数 $y=-x^2+2x+5$ $(0 \leqq x \leqq a)$ の最大値と最小値を求めよ。

② 最大値と最小値をまとめて考えた場合

(Ⅰ)定義域の左端x=0で最大となり，
定義域の右端x=aで最小となる場合
→「軸が定義域より右側」
すなわち，0< a <2

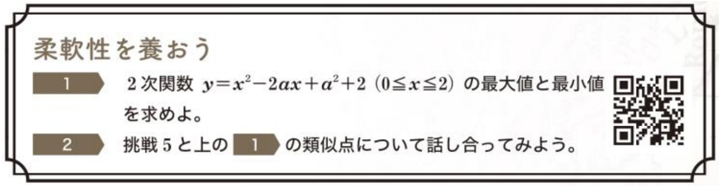
(Ⅱ) 定義域の左端x=0で最大となり，
軸x=2で最小となる場合
→「軸が定義域の中央より右側」かつ
「軸が定義域に含まれる」
すなわち，2≦a <4

(Ⅲ) 定義域の両端x=0，aで最大となり，
軸x=2で最小となる場合
→「軸が定義域の中央」
すなわち，a =4

(Ⅳ) 定義域の右端x=aで最大となり，
軸x=2で最小となる場合
→「軸が定義域の中央より左側」かつ
「軸が定義域に含まれる」
すなわち，4< a

○探究 5 で考えた内容の定着，および上に凸の場合の演習として，問を扱ってもよい。

挑戦 5　2 次関数 $y=x^2-2x+3$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ の最大値と最小値を求めよ。	**4．　2次関数　$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ について，定義域が（$a \leqq x \leqq a+2$）の場合で，最大値と最小値を求める方法を考える。（挑戦5）** たとえば最大値と最小値をまとめて考えると，次のように場合分けできる。 (Ⅰ) 定義域の左端$x= a$で最大となり， 定義域の右端$x=a+2$で最小となる場合 →「軸が定義域より右側」 すなわち，$a <-1$ (Ⅱ) 定義域の左端$x=a$で最大となり， 軸$x=1$で最小となる場合 →「軸が定義域の中央より右側」かつ 「軸が定義域に含まれる」 すなわち，$-1 \leqq a <0$ (Ⅲ) 定義域の両端$x=a$，$a+2$で最大となり， 軸$x=1$で最小となる場合 →「軸が定義域の中央」 すなわち，$a =0$ (Ⅳ) 定義域の右端$x=a+2$で最大となり， 軸$x=1$で最小となる場合 →「軸が定義域の中央より左側」かつ 「軸が定義域に含まれる」 すなわち，$0< a \leqq 1$ (Ⅴ) 定義域の右端$x= a+2$で最大となり， 定義域の左端$x=a$で最小となる場合 →「軸が定義域より左側」 すなわち，$1<a$	○定義域の上端で場合分けして，探究 5 と挑戦 5 を関連付けて統合的に考えさせる。

 柔軟性を養おう 1 2次関数 $y=x^2-2ax+a^2+2$（$0\leqq x\leqq 2$）の最大値と最小値を求めよ。 2 挑戦5と上の 1 の類似点について話し合ってみよう。	5． **2次関数 $y=x^2-2ax+a^2+2=(x-a)^2+2$ について，定義域が（$0\leqq x\leqq 2$）の場合で，最大値と最小値を求める方法を考える。** **挑戦5との類似点を探そう。(柔軟性を養おう)** ア） 挑戦5の2次関数は，柔軟性を養おうの2次関数で$a=1$の場合である。 イ） どちらも定義域の幅が2で同じである。 ウ） 「定義域と軸の位置関係」で場合分けすればよさそうだ。 エ） 変数aの値によって，軸の位置が変化することがわかる。	○挑戦５で最大・最小を求める方法と，関数にパラメータを含む２次関数で最大・最小を求める方法との類似点に着目させ，発展的に考えさせる。 ○「柔軟性を養おう」については，次回授業までの課題とし，次回授業の際に話し合わせるほか，レポートとして提出させ，それを評価させてもよい。